

2009 年浙江省高中数学竞赛试卷 参考答案

一、选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 5 分, 共计 50 分)

1. 已知集合 $M = \{1, 2\}$, $N = \{2a - 1 | a \in M\}$, 则 $M \cap N =$ (A)

A. $\{1\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{1, 2, 3\}$ D. 空集

解: 由于 $N = \{2a - 1 | a \in M\} = \{1, 3\}$, 所以 $M \cap N = \{1\}$ 。 答案为 A。

2. 已知椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上一点 P 到点 $(4, 0)$ 距离等于 4, 则 P 点到直线

$x = -\frac{25}{4}$ 的距离为 (C)

A. 4 B. 6 C. $\frac{15}{2}$ D. $\frac{5}{4}$

解: 因为 $a = 5, b = 3$, 则 $c = 4$ 。于是 P 到另一个焦点 $(-4, 0)$ 的距离等于 $2 \times 5 - 4 = 6$ 。由于直线 $x = -\frac{25}{4}$ 为椭圆的左准线方程, 则 P 到直线 $x = -\frac{25}{4}$ 的距离为

$d = \frac{6}{e} = \frac{6}{\frac{4}{5}} = 7.5$ 。 答案为 C。

3. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 > 0$, $3a_8 = 5a_{13}$, 则部分和 S_n 中最大的是 (C)

A. S_{10} B. S_{11} C. S_{20} D. S_{21}

解: 由题意知, $3a_8 = 5a_{13} \Rightarrow 3(a_1 + 7d) = 5(a_1 + 12d) \Rightarrow d = -\frac{2}{39}a_1 < 0$ 。所以 $\{a_n\}$ 是单调递减数列。又 $a_n = a_1 + (n-1)(-\frac{2}{39}a_1) = a_1[1 - \frac{2}{39}(n-1)] > 0 \Rightarrow n \leq 20$ 。由此可得当 $n = 20$ 时, S_n 最大。 答案为 C

4. 已知平面上单位向量 $\vec{a} = (\frac{5}{13}, \frac{12}{13})$, $\vec{b} = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$, 则下列关系式正确的是 (B)

A. $\vec{a} \perp \vec{b}$ B. $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$ C. $(\vec{a} + \vec{b}) // (\vec{a} - \vec{b})$ D. $\vec{a} \perp (\vec{a} + \vec{b})$

解: 因为 \vec{a}, \vec{b} 都是非零单位向量, 以 \vec{a}, \vec{b} 为边, $\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}$ 为对角线构成一个菱形。所以 $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$ 。 答案为 B。

5. 方程 $x^3 - 12x + a = 0$ 有三个不同的实数根, 则实数 a 的取值范围为 (A)

A. $(-16, 16)$ B. $[-16, 16]$ C. $(-\infty, -8)$ D. $(8, +\infty)$

解：令 $f(x) = x^3 - 12x + a$ ，则 $f'(x) = 3x^2 - 12$ 。 $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$ 。

要使 $f(x) = 0$ 有三个不同的零点，则必须有 $f(2)f(-2) < 0$ ，即 $(a-16)(a+16) < 0$ ，

也即有 $-16 < a < 16$ 。

答案为 A。

6. 设 $x, y, r \in R$ ，则使代数式 $\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} + \lg(x+y)$ 有意义的动点 (x, y) 形成的图形 (C)

A. 关于 x 轴对称， B. 关于 y 轴对称， C. 关于直线 $y = x$ 对称 D. 关于直线 $y = -x$ 对称。

解：由题意得 $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq r^2 \\ x + y > 0 \end{cases}$ ，则动点 (x, y) 形成的图形关于直线 $y=x$ 对

称。

答案为 C。

7. $\left(x - \frac{1}{x^6}\right)^{2009}$ 的二项展开式中常数项为 (D)

A. C_{2009}^{286}

B. C_{2009}^{287}

C. $-C_{2009}^{286}$

D. $-C_{2009}^{287}$

解：由于 $\left(x - \frac{1}{x^6}\right)^{2009} = \sum_{k=0}^{2009} C_{2009}^k x^{2009-k} (-x^{-6})^k$ ，则出现常数项，须满足

$$2009 - k - 6k = 0 \Rightarrow k = 287。$$

答案为 D。

8. “函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调”是“函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有最大值”的 (B)

A. 必要非充分条件

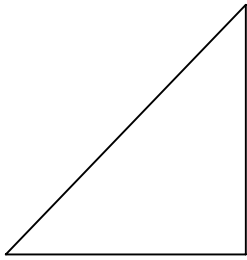
B. 充分非必要条件

C. 充分且必要条件

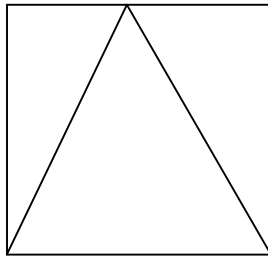
D. 既非充分也非必要条件

解：答案为 B。

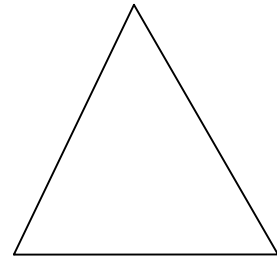
9. 已知立体的三视图如下，问该立体的体积为 (C)



侧视图
(等腰直角三角形, 直角边长为 1)



俯视图
(正方形, 边长为 1)



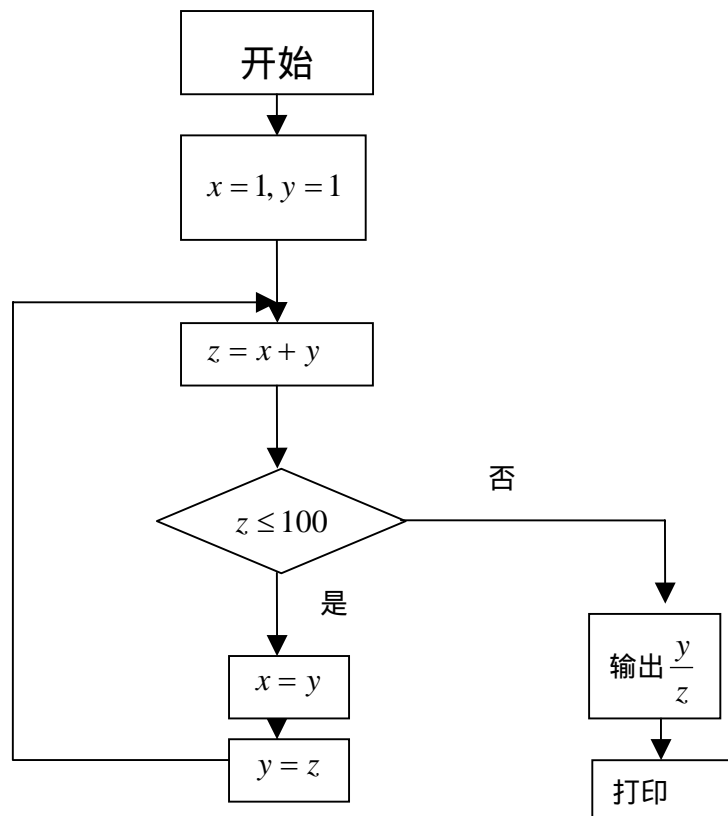
正视图
(等腰三角形, 底边边长为 1, 高为 1)

- A . 1 B . $\frac{1}{2}$ C . $\frac{1}{3}$ D . $\frac{1}{6}$

解： 答案为 C。

10. 问下述计算机程序的打印结果为 (D)

- A . $\frac{89}{100}$ B . $\frac{68}{110}$ C . $\frac{68}{100}$ D . $\frac{89}{144}$



解： 答案为 D。

二、填空题（本大题共 7 小题，每小题 7 分，共计 49 分）

11. $(1+i)^4 + (1-i)^4 = \underline{\hspace{2cm}} - 8$ 。

解：由于 $(1 \pm i)^2 = \pm 2i$ ，所以 $(1+i)^4 + (1-i)^4 = (2i)^2 + (-2i)^2 = -8$ 。

12. 直线 $y=b$ 与函数 $y=|x^2 - 4x + 3|$ 的图像至少有三个公共点，则实数 b 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}} 0 < b \leq 1$ 。

解：通过作图可知，实数 b 的取值范围为 $0 < b \leq 1$ 。

13. 对任意正整数 n ，数列 $\{a_n\}$ 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = n^3$ ，则 $\sum_{i=2}^{2009} \frac{1}{a_i - 1} = \underline{\frac{2008}{6027}}$ 。

解：由题意得， $a_n = S_n - S_{n-1} = n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$ 。于是

$$\frac{1}{a_n - 1} = \frac{1}{3n^2 - 3n} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)。$$

所以 $\sum_{i=2}^{2009} \frac{1}{a_i - 1} = \sum_{i=2}^{2009} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i} \right) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2009} \right) = \frac{2008}{6027}$ 。

14. 已知 $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，则 $\cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} = \underline{\frac{1}{4}}$ 。

解： $(\sin \alpha + \sin \beta)^2 = \frac{2}{3}$, $(\cos \alpha + \cos \beta)^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow 1 + 2\sin \alpha \sin \beta = \frac{2}{3}$, $1 + 2\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow 2 + 2\sin \alpha \sin \beta + 2\cos \alpha \cos \beta = 1 \Rightarrow 1 + \cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{1}{4}$ 。

15. 实数 x, y, z 满足 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ，则 $\sqrt{2}xy + yz$ 的最大值为 $\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ 。

解： $1 = x^2 + y^2 + z^2 = (x^2 + \frac{2}{3}y^2) + (\frac{1}{3}y^2 + z^2) \geq 2\sqrt{\frac{2}{3}}xy + 2\sqrt{\frac{1}{3}}yz = \frac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}xy + yz)$ 。

由此可得 $\sqrt{2}xy + yz \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，其中等号成立当且仅当 $x = \sqrt{\frac{1}{3}}, y = \sqrt{\frac{1}{2}}, z = \sqrt{\frac{1}{6}}$ 。

16. 在边长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E, F 分别为 AA_1, CC_1 上的点，且 $AE = C_1F$ ，则四边形 $EBFD_1$ 的面积最小值为 $\underline{\frac{\sqrt{6}}{2}}$ 。

解：由题意，可得当 E, F 分别是 AA_1, CC_1 的中点时，四边形 $EBFD_1$ 的

面积可取到最小值 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 。

17. 设 $1 \leq x, y, z \leq 6$ ，则自然数 x, y, z 的乘积能被 10 整除的情形有 72 种。

解：(1) x, y, z 的取法有 6^3 种；(2) x, y, z 不取 2, 4, 6 的取法有 3^3 种；(3) x, y, z 不取 5 的取法有 5^3 种；(4) x, y, z 不取 2, 4, 5, 6 的取法有 2^3 种。由容斥原理得， x, y, z 的乘积能被 10 整除的情形有 $6^3 - 3^3 - 5^3 + 2^3 = 72$ 。

三、解答题（本大题共 3 小题，每小题 17 分，共计 51 分）

18. 三棱锥 S-ABC 中， $SA \perp$ 平面 ABC， $AB = BC = SA = 1$ ， $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ 。

(1) 求 SC 与平面 ABC 所成夹角的正弦值；

(2) 求 B 到平面 ASC 的距离；

(3) 求平面 SBC 与 SAC 所成锐二面角的大小。

解：在平面 ABC 上，过 A 作 $AD \perp AB$ 。以 A 为原点，以向量 AB, AD, AS 的方向分别为 x, y, z 轴，建立空间直角坐标系。于是有 $A(0,0,0)$ ， $B(1,0,0)$ ， $C(1,1,0)$ ， $S(0,0,1)$ 。

(1) 因为 $SA \perp$ 平面 ABC，所以 SC 与平面 ABC 所成夹角就是 $\angle ACS$ 。在直角 SAC 中， $AC = \sqrt{2}$ ， $SC = \sqrt{3}$ ，于是 $\sin \angle ACS = \frac{SA}{SC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 。（5 分）

(2) 设平面 ASC 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，则 $\vec{n} \perp \vec{AS}$ 且 $\vec{n} \perp \vec{SC}$ ，而 $\vec{AS} = (0,0,1)$ ， $\vec{SC} = (1,1,-1)$ ，所以

$$\begin{cases} z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}, \text{ 从而有 } \vec{n} = (1, -1, 0)。$$

于是 B 到平面 ASC 的距离为 $d = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。（11 分）

(3) 设平面 SBC 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$ ，则 $\vec{m} \perp \vec{BC}$ 且 $\vec{m} \perp \vec{SC}$ ，而 $\vec{BC} = (0,1,0)$ ，所以 $\begin{cases} y = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ ，从而有 $\vec{m} = (1, 0, 1)$ 。

设平面 SBC 与 SAC 所成锐二面角为 θ ,

$$\text{则 } \cos \theta = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{1}{2}, \text{ 即 } \theta = \frac{\pi}{3}. \quad (17 \text{ 分})$$

19 . 已知抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 上两个动点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, O 为坐标原点 , $OA \perp OB$. (1) 求线段 AB 中点的轨迹方程 C ; (2) 若在 C 上的点到直线 $x - 2y + 2\sqrt{5} - p = 0$ 的距离为 d , 求 d 的最小值.

解 : 设 $y_1^2 = 2px_1$, $y_2^2 = 2px_2$, 则 $x_1 x_2 = \frac{1}{4p^2} (y_1 y_2)^2$. 又因为 $OA \perp OB$, 所以 $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$. 从而有 $y_1 y_2 + \frac{1}{4p^2} (y_1 y_2)^2 = 0$, 即有 $y_1 y_2 = -4p^2$. (5 分)

(1) 设 AB 的中点坐标为 (x, y) , 则 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$. 于是有

$$x = \frac{1}{2} (x_1 + x_2) = \frac{1}{4p} (y_1^2 + y_2^2) = \frac{1}{4p} [(y_1 + y_2)^2 - 2y_1 y_2] = \frac{1}{4p} [4y^2 + 8p^2] ,$$

即 $y^2 = px - 2p^2$ 为该中点的轨迹方程. (11 分)

$$(2) d = \frac{|x - 2y + 2\sqrt{5} - p|}{\sqrt{5}} = \frac{\left| \frac{1}{p} (y^2 + 2p^2) - 2y + 2\sqrt{5} - p \right|}{\sqrt{5}} = \frac{|(y - p)^2 + 2\sqrt{5}p|}{\sqrt{5}p} \geq 2.$$

当 $y = p$ 时 , $x = 3p$, $d_{\min} = 2$. (17 分)

20 . 设函数 $f(x) = 3ax^2 - 2(a+b)x + b$, 其中 $a > 0$, b 为任意常数. 证明 :

当 $0 \leq x \leq 1$ 时 , 有 $|f(x)| \leq \max\{f(0), f(1)\}$.

证 : 已知 $f(x) = 3ax^2 - 2(a+b)x + b$, 所以 $x_0 = \frac{a+b}{3a}$ 为其极小值点 , 此时

$$|f(x_0)| = \frac{|ab - (a^2 + b^2)|}{3a} = \frac{a^2 + b^2 - ab}{3a} , \text{ 而 } \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| = \max\{|f(x_0)|, |f(0)|, |f(1)|\} .$$

(7 分)

1) $0 \leq x_0 \leq 1$; 此时有 $\begin{cases} a+b \geq 0 \\ 2a-b \geq 0 \end{cases}$.

(i) 当 $b \leq 0$ 时 , $|f(1)| = |a-b| = a-b = f(1) > -b = |f(0)|$;

$$|f(x_0)| = \frac{a^2 + b^2 - ab}{3a} \leq f(1) \Leftrightarrow a^2 + b^2 - ab \leq 3a(a-b) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab \leq 3a^2$$

$\Leftrightarrow 0 < a + b \leq \sqrt{3}a$ (此不等式显然成立)

于是有 $\max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| = \max\{|f(x_0)|, |f(0)|, |f(1)|\} = f(1) = \max\{f(0), f(1)\}$ 。

(ii) 当 $a > b > 0$ 时, $|f(1)| = |a - b| = a - b = f(1), |f(0)| = b = f(0)$;

此时同样有 $|f(x_0)| \leq f(1)$ 。

于是有 $\max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| = \max\{|f(x_0)|, |f(0)|, |f(1)|\} = \max\{f(0), f(1)\}$ 。

(iii) 当 $b > a > 0$ 时, $|f(1)| = |a - b| = b - a < |f(0)| = b = f(0)$, 此时考虑

$$|f(x_0)| \leq f(0) \Leftrightarrow a^2 + b^2 - ab \leq 3ab \Leftrightarrow (2a - b)^2 \leq 3a^2 \Leftrightarrow 0 \leq 2a - b \leq \sqrt{3}a$$

$$\Leftrightarrow (2 - \sqrt{3})a < a < b$$

于是有 $\max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| = \max\{|f(x_0)|, |f(0)|, |f(1)|\} = \max\{f(0), f(1)\}$ 。 (12分)

2) $x_0 < 0$; 此时有 $a + b < 0$ 。由于 $a > 0$, 所以 $b < 0$ 。于是有

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| = \max\{|f(0)|, |f(1)|\} = \max\{-b, a - b\} = a - b = f(1) = \max\{f(0), f(1)\}。$$

3) $x_0 > 1$; 此时有 $2a - b < 0$ 。由于 $a > 0$, 所以 $b > 0$ 。于是有

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| = \max\{|f(0)|, |f(1)|\} = \max\{b, |a - b|\}。$$

当 $a > b$ 时, $\max\{b, |a - b|\} = \max\{b, a - b\} = \max\{f(0), f(1)\}$;

当 $a < b$ 时, $\max\{b, |a - b|\} = \max\{b, b - a\} = b = \max\{f(0), f(1)\}$ 。

综合 1), 2), 3), 有

当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 有 $|f(x)| \leq \max\{f(0), f(1)\}$ 。 (17分)

四、附加题 (本大题共 2 小题, 每小题 25 分, 共计 50 分)

注: 附加题每题的得分只能是: 0, 5, 10, 15, 20, 25, 即 5 分为一个档次。

21. 设 $x_i \in R^+$ ($i = 1, 2, \dots, 2010$) 且 $\sum_{i=1}^{2010} x_i^{2009} = 1$ 。试求 $\min\left(\sum_{i=1}^{2010} \frac{x_i^{2008}}{1 - x_i^{2009}}\right)$, 并证明之。

解: 由于 $\sum_{i=1}^{2010} \frac{x_i^{2008}}{1 - x_i^{2009}} = \sum_{i=1}^{2010} \frac{x_i^{2009}}{x_i(1 - x_i^{2009})}$ 。 (5分)

令 $y_i = x_i(1 - x_i^{2009})$, 则对任意 $1 \leq i \leq 2010$, 有

$$y_i^{2009} = \frac{1}{2009} (2009x_i^{2009})(1 - x_i^{2009})^{2009} \leq \frac{1}{2009} \left(\frac{2009x_i^{2009} + 2009(1 - x_i^{2009})}{2010} \right)^{2010} = \frac{1}{2009} \left(\frac{2009}{2010} \right)^{2010} .$$

即有 $y_i \leq \left(\frac{1}{2009} \left(\frac{2009}{2010} \right)^{2010} \right)^{\frac{1}{2009}} = 2009(2010)^{-\frac{2010}{2009}}$, (10分)

从而有

$$\frac{1}{y_i} \geq \frac{(2010)^{\frac{2010}{2009}}}{2009} = \frac{2010}{2009} \sqrt[2009]{2010} .$$

由于 $\sum_{i=1}^{2010} x_i^{2009} = 1$, 所以 $\sum_{i=1}^{2010} \frac{x_i^{2008}}{1 - x_i^{2009}} = \sum_{i=1}^{2010} \frac{x_i^{2009}}{x_i(1 - x_i^{2009})} \geq \frac{2010}{2009} \sqrt[2009]{2010}$. (15分)

上式等号成立的充要条件是 $2009x_i^{2009} = 1 - x_i^{2009}$, 即 $x_i = \frac{1}{\sqrt[2009]{2010}}$, $1 \leq i \leq 2010$.

因此 $\min \left(\sum_{i=1}^{2010} \frac{x_i^{2008}}{1 - x_i^{2009}} \right) = \frac{2010}{2009} \sqrt[2009]{2010}$. (25分)

评分标准：求出最小值得 5 分；中间过程 20 分。

22 . 用一个数列取遍走遍复平面上所有整点：令 $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, 然后按逆时针方向逐格前进。再令 $a_{n+1} - a_n = i^{f(n)}$, 其中 i 为虚数单位。求 $f(n)$ 的最简洁的统一表达式。

解：由于 $i^4 = 1$, 所以 $f(n)$ 应是模 4 的同余式。为了寻找规律 , 我们首先

去求

$$f(n) = 0, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, \dots, \overbrace{2k, \dots, 2k}^{k+1 \text{ 个}}, \overbrace{2k+1, \dots, 2k+1}^{k+1 \text{ 个}}, \dots$$

的表达式。 (10分)

在这里 , 对使 $f(n) = 2k$ 的最小 n , 有

$$n = 2 \times 1 + 2 \times 2 + \dots + 2 \times k = k(k+1) .$$

所以

$$f(n) = \begin{cases} 2k, & \text{当 } k(k+1) \leq n < (k+1)^2; \\ 2k+1, & \text{当 } (k+1)^2 \leq n < (k+1)(k+2). \end{cases} \quad (20 \text{ 分})$$

即 $f(n) = l$ 。当 l 为偶数时， $k = \frac{l}{2}$ ，所以

$$\frac{l}{2} \left(\frac{l}{2} + 1 \right) \leq n \leq \left(\frac{l}{2} + 1 \right)^2 - 1,$$

即 $l(l+2) \leq 4n \leq (l+2)^2 - 4$ ，也即有 $(l+1)^2 \leq 4n+1 \leq (l+2)^2 - 3 < (l+2)^2$ 。

当 l 为奇数时， $k = \frac{l-1}{2}$ ，所以

$$\left(\frac{l+1}{2} \right)^2 \leq n \leq \frac{l+1}{2} \frac{l+3}{2} - 1,$$

即 $(l+1)^2 \leq 4n \leq (l+1)(l+3) - 4$ ，也即有 $(l+1)^2 < (l+1)^2 + 1 \leq 4n+1 \leq (l+2)^2 - 5 < (l+2)^2$ 。

总之有 $l = [\sqrt{4n+1}] - 1$ 。于是有

$$f(n) = [\sqrt{4n+1}] - 1 \pmod{4}. \quad (25 \text{ 分})$$